Endomorphismes d'un espace hermitien

$(E, \langle , \rangle)$ est hermitien

Ex : $E = \mathbb{C}^n \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k$

$E = \mathcal{T}_n \quad \langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P} Q \quad (\text{BON } e^{ik\theta}, -n \leq k \leq n)$

I Adjonction matricielle

Déf : Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $A^* = {}^t\overline{A}$

Exp : Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $(AB)^* = B^* A^*$

2) $\det A^* = \overline{\det A}$ $\quad \chi_{A^*}(t) = \overline{\chi_A}(t)$

$\left[P = \sum_0^n \alpha_k X^k, \overline{P} = \overline{\alpha_k} X^k \right]$

3) $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}\, A$, en effet $\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(\overline{A}) = \mathrm{rg}\, A$ (mineurs)

Matrices hermitiennes :

$H_n(\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = A^* \}$

1) Structure $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-ev et $\dim H_n(\mathbb{C}) = n^2$

D/ Soit $A = B + iC \in M_n(\mathbb{C})$, avec B et C réelles

$$A \in H_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow A^* = A \Leftrightarrow {}^tB = B \text{ et } {}^tC = -C$$

$$H_n(\mathbb{C}) \cong S_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$$

90

$\dim H_n(\mathbb{C}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$

2) Si $A \in H_n(\mathbb{C})$, $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ (2) ci avant)

Matrices unitaires :

$U_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U^* U = I_n\}$

1) $U_n(\mathbb{C})$ est un sg de $GL_n(\mathbb{C})$

2) $U \in U_n(\mathbb{C}) \iff$ les colonnes de U forment une SON (BON) de $(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle) \iff$ les lignes de A ———

$U = [u_{k,l}]$, $U^* U = I_n$ $[U^* U](p,q) = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_{kp}}\, u_{kq}$

ainsi $p \neq q$ $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_{kp}}\, u_{kq} = 0$, $p = q$ $\sum_{k=1}^{n} |u_{kp}|^2 = 1$

3) $U \in U_n(\mathbb{C}) \iff \exists (e)(e')$ BON de t, $U = [(e')]_{(e)}$

Calculer des (e) revient à remplacer des $\mathbb{C}^n$ con...

Matrices normales

$A \in M_n(\mathbb{C})$ $AA^* = A^* A$

II Adjonction dans $\mathcal{L}(E)$

Th-déf Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\exists!\, v \in \mathcal{L}(E)$ $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$

un sp hermitien n'est pas lin. iso avec son dual

v est caractérisé par $\forall (e)$ BON de E $[v]_{(e)} = [u]^*_e$

⚠ $j \begin{pmatrix} E \to E^* \\ x \mapsto \langle x, \cdot \rangle \end{pmatrix}$ $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E$ $j(\lambda x) = \overline{\lambda}\, j(x)$

D/ On se donne $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E, $A = [u]_{(e)}$

$B = A^*$, v $[v]_{(e)} = B$

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \, \underbrace{u(e_\ell)}_{\text{\'ecrit }u(e_\ell)}, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell e_\ell \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} e_k, \sum_{\ell'=1}^{n} y_{\ell'} e_{\ell'} \rangle$$

$$= \sum_{1 \le k, \ell \le n} \overline{x_\ell} \, \overline{a_{k\ell}} \, y_k$$

$$\langle x, v(y) \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell e_\ell, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell \left(\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} e_k \right) \rangle$$

$$= \sum_{1 \le k, \ell' \le n} \overline{x_k} \, \overline{a_{\ell' k}} \, y_{\ell'}$$

* unicité $\langle u(e_k), e_\ell \rangle = \overline{a_{\ell k}} = \langle e_k | v(e_\ell) \rangle$

$= b_{k\ell}$

Prop Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*

D/ Si $y \in F^\perp$ il vient : $0 = \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$

donc $v(y) \in F^\perp$

hermitien / unitaire

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ D $u = u^* \iff \exists (e)$ BON $[u]_{(e)}$ est hermitienne

$\iff \forall (e)$ BON

2) u est unitaire ie $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\iff \exists (e)$ BON $[u]_{(e)}$ est unitaire

$\iff \forall (e)$ BON

9L

1) Clair car $[u^*]_{(e)} = [u]^*_{(e)}$ en BON

2) $u \in U(E) \iff \forall (x,y) \in E^2, \langle x, u^* \circ u(y) \rangle = \langle x | Id(y) \rangle$

$\iff u^* \circ u = Id_E \iff U^* U = I_n$

Ex Mq $U(E)$ est compact

S/ IS de Mq $U_n(\mathbb{C})$ est compact

1) Si $U \in U_n(\mathbb{C})$, $|||U|||_2 = 1$

2) $U \xrightarrow{\phi} U^* U - I$ est $\mathcal{C}^0 \Rightarrow \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé

Th Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ 1) u est normal $\iff u$ est DZ en BON

2) u est hermitien $\iff u$ est DZ en BON et $spec(u) \subset \mathbb{R}$

3) u est unitaire $\iff$ ________ et $spec(u) \in S^1$

Fin.